
Conceptos básicos de la teoría elemental de series de Fourier

3.1. Introducción

Con el nombre “análisis de Fourier” y también “análisis armónico” se conoce un conjunto de técnicas matemáticas dirigidas a la descomposición de señales en sinusoides (el *análisis* de la señal) y su posterior reconstrucción (la *síntesis* de la señal). La Transformada de Fourier, las Series de Fourier, la Transformada de Fourier Discreta son, junto con otras técnicas del análisis armónico, la base para el procesamiento y digitalización de todo tipo de señales; cuando escuchas música en tu ordenador, usas un escáner o haces una fotografía con una cámara digital, estás usando una tecnología que no sería posible sin dichas técnicas matemáticas. Los métodos de reconocimiento de imágenes, tan importantes en medicina y en la industria automovilística, usan también dichas técnicas. Cuando miras un analizador de frecuencias o la gráfica de un electrocardiograma o el monitor que muestra el pulso de un enfermo, estás *viendo* análisis de Fourier. Las aplicaciones del análisis armónico se han multiplicado debido a los métodos eficaces para el cálculo de la Transformada de Fourier Discreta (el algoritmo conocido como Transformada Rápida de Fourier) y a la potencia de cálculo de los modernos ordenadores.

Desde un punto de vista puramente matemático, no es exagerado afirmar que el análisis de Fourier ha sido el principal motor del desarrollo de las matemáticas en los siglos XIX y XX. Sin ir más lejos, la teoría de conjuntos infinitos de Cantor, la teoría de la medida e integración de Lebesgue y la evolución del concepto de función hasta llegar a la teoría de distribuciones, han estado motivados directamente por problemas surgidos en el análisis armónico.

Estructura de la lección y objetivos

En esta lección vamos a introducir algunos conceptos elementales de la teoría de Series de Fourier y de la Transformada de Fourier Discreta. En este tema *hay matemáticas*,

parece innecesario decirlo, pero eludiremos los detalles técnicos y nos centraremos en los aspectos de cálculo y en las aplicaciones. El mundo del tratamiento de la señal es muy amplio: óptica, fotografía, vídeo, telefonía, música, radio, televisión... y el tratamiento de la señal requiere potentes técnicas de cálculo que no podrían llevarse a cabo sin el concurso del ordenador. Por ello creo que este tema tiene interés para todos los profesionales de la informática. Quién sabe si alguna vez tendrás la oportunidad de trabajar en estos temas tan apasionantes. Aquí vas a aprender la terminología y los conceptos más básicos lo que te permitirá, si alguna vez lo necesitas o te interesas en ello, que puedas continuar con provecho profundizando en su estudio.

Conviene que repases las fórmulas de Euler para la exponencial compleja que vimos en la lección primera. También te vendrá bien repasar la técnica de integración por partes y el cálculo de primitivas de productos de senos y cosenos.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección en las que nos ocuparemos de la aproximación por polinomios trigonométricos y del tratamiento de sonidos e imágenes con la ayuda de la Transformada de Fourier Discreta.

3.2. Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier

Esencialmente la teoría de Series de Fourier persigue dos propósitos:

- El Análisis o descomposición de una señal como suma o superposición (en general infinita) de sinusoides.
- La síntesis o recomposición de una señal a partir de sus sinusoides.

Habrás notado que estoy empleando la palabra “señal” como sinónimo de “función” y así lo seguiré haciendo a lo largo de esta lección con las precisiones que considere necesarias. En análisis armónico las señales más simples son las sinusoides a las que nos hemos referido ya varias veces. Conviene darles un repaso.

Sinusoides

Una senoide es una señal de la forma

$$A \operatorname{sen}(2\pi vt + \phi).$$

El número $A > 0$ es la *amplitud*, $v > 0$ es la *frecuencia* medida en ciclos por segundo o Hercios (Hz), $-\pi < \phi \leq \pi$ es la *fase* (fase inicial), $2\pi v$ es la frecuencia medida en radianes por segundo (que se llama a veces frecuencia angular). El *período* es el tiempo que necesita la senoide para completar un ciclo completo, es decir, el período es $T = 1/v$ segundos.

$$A \operatorname{sen}(2\pi v(t + 1/v) + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi vt + 2\pi + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi vt + \phi).$$

En general, una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *periódica* con *período* T si $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En tal caso cualquier múltiplo entero de T es también un período de f ,

esto es, $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Cuando se dice que una función es periódica de período T se sobreentiende que T es el número positivo más pequeño que verifica la igualdad $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En la representación gráfica de la señal $f(t) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi)$ se interpreta $f(t)$ como la amplitud de la señal en el instante t . La amplitud A representa la máxima altura que alcanza dicha gráfica, esto es, el máximo absoluto de la función f (el mínimo absoluto es $-A$). La frecuencia es el número de veces (ciclos) que se repite la gráfica en un segundo. El período es el tiempo necesario para que la gráfica complete un solo ciclo.

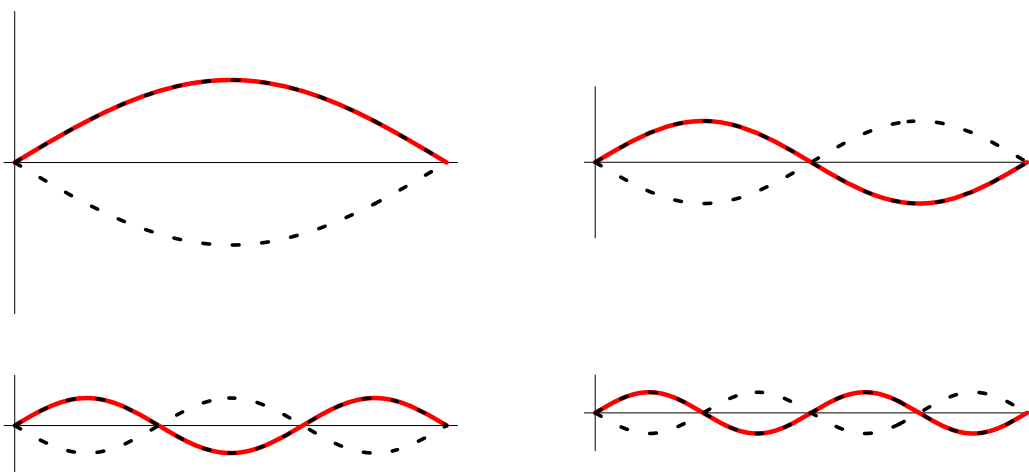
Frecuencia principal y armónicos

Observa que cuanto mayor es la frecuencia más rápidamente oscila la señal. En lo que sigue puedes suponer que las señales representan sonidos. El rango de frecuencias audibles por el oído humano está entre 20 Hz y 22.000 Hz. Las frecuencias fundamentales de las 88 notas de un piano varían desde 27.5 Hz a 4096 Hz. El tono de un sonido depende de la frecuencia. Los sonidos graves se corresponde con bajas frecuencias y los agudos con frecuencias altas. La intensidad del sonido se mide en decibelios (db) y es proporcional a la amplitud de la señal. El timbre o calidad de un sonido (lo que distingue una misma nota en diferentes instrumentos) depende de los armónicos que acompañan al armónico principal (después explicaremos esto de los armónicos).

Las ondas sinusoidales tienen la particularidad de producir un sonido puro, es decir, un sonido que consta de una única frecuencia. Los sonidos que producen los instrumentos musicales son mucho más ricos porque en ellos se superponen sonidos de distintas frecuencias: los armónicos. Los armónicos son sonidos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Si la frecuencia fundamental es 260 Hz, los armónicos tendrán frecuencias 520 Hz, 780 Hz, 1040 Hz etcétera.

Normalmente no escuchamos los armónicos como tonos separados debido, en parte, a que las amplitudes de los armónicos van decreciendo conforme aumenta la frecuencia. Pero son ellos los que proporcionan a los sonidos musicales y a la voz humana su profundidad y riqueza. ¿Cómo se producen los armónicos? Considera una cuerda de guitarra. Ella pueda vibrar en un movimiento simple hacia arriba y hacia abajo. Pero también puede vibrar de formas más complejas. Por ejemplo, la mitad de la cuerda vibra hacia un lado y la otra media hacia el otro (un nodo en el centro). O la tercera parte de la cuerda pueda vibrar en sentido contrario a las otras partes adyacentes (dos nodos centrales). Y así podríamos continuar. Cada modo de vibración produce una senoide con su propia frecuencia y amplitud. La frecuencia correspondiente a la vibración básica hacia arriba y hacia abajo es la frecuencia fundamental. La frecuencia de la senoide producida por la segunda forma de vibración es dos veces la frecuencia fundamental (el sonido que produce es una octava más alta que el anterior). La frecuencia que corresponde a la tercera forma de vibración es tres veces la frecuencia fundamental, etcétera.

Naturalmente, cuando una cuerda de guitarra vibra se producen todas las vibraciones consideradas simultáneamente y muchas otras más. Cada una de las sinusoides de fre-



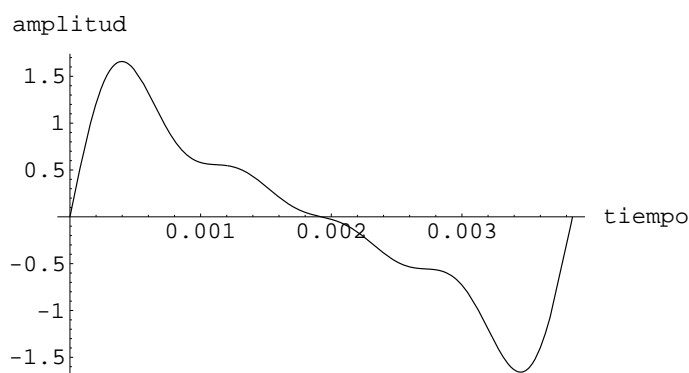
cuencia múltiplo entero de la fundamental se llama un armónico. En las vibraciones que se producen de forma natural hay armónicos para cada múltiplo de la frecuencia fundamental, en teoría puede haber infinitos aunque su amplitud decrece conforme aumenta la frecuencia. Prueba el siguiente experimento. Pulsa una cuerda de guitarra y cuando empiece a vibrar tócala ligeramente justo en su punto medio. Observa cómo cambia el sonido que produce: lo que estás oyendo ahora es el segundo armónico. Observa que tú no has pulsado la cuerda de guitarra una segunda vez: estos sonidos estaban allí. Al tocar suavemente la cuerda en su punto medio estás eliminando todos los armónicos cuyas frecuencias son múltiplo impar de la principal (incluida dicha frecuencia).

Representación en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia

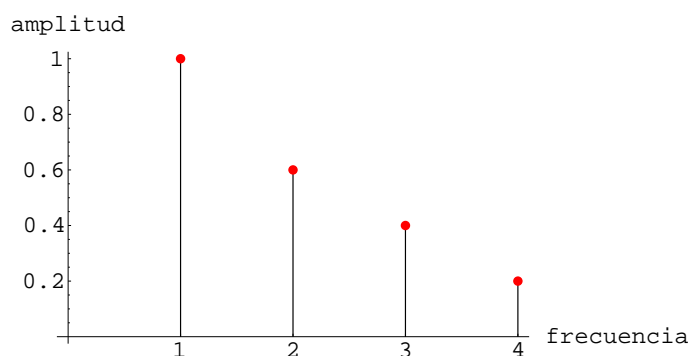
Los sonidos puros pueden representarse gráficamente por una senoide con amplitud y frecuencia apropiadas. En esta representación el eje de abscisas se interpreta como el tiempo y en el eje de ordenadas se representa la amplitud. Esto es lo que se conoce como la representación en el dominio del tiempo. Pero la mayoría de los sonidos son complejos y están formados por una superposición de armónicos cada uno con su propia frecuencia y amplitud. Para tales sonidos una representación en el dominio del tiempo no nos proporciona información de sus componentes. Una forma mejor de visualizar la estructura de un sonido complejo consiste en representar las frecuencias en el eje de abscisas y las amplitudes de cada frecuencia en el eje de ordenadas. De esta forma lo que obtenemos es un diagrama de barras; sobre cada frecuencia múltiplo de la principal levantamos un segmento cuya altura representa su amplitud: esta es la representación en el dominio de la frecuencia y el gráfico correspondiente se suele llamar el espectro de amplitudes de la señal. Una señal sinusoidal pura tiene el espectro de amplitudes más sencillo posible: consta de un solo segmento vertical pues dicha señal tiene toda su energía concentrada en una sola frecuencia. Otro espectro sencillo es el de un ruido. Un ruido es un sonido en el que se superponen todas las frecuencias con iguales amplitudes, el espectro correspondiente sería una recta horizontal.

Aquí tienes una representación en el dominio del tiempo de la señal

$$f(t) = \text{sen}(260 \times 2\pi t) + .6 \text{sen}(2 \times 260 \times 2\pi t) + .4 \text{sen}(3 \times 260 \times 2\pi t) + .2 \text{sen}(4 \times 260 \times 2\pi t)$$



Aquí tienes la representación de la misma señal en el dominio de la frecuencia (la unidad en el eje de frecuencias representa 260 Hz).



Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) escribió en 1807 un trabajo sobre la propagación del calor en el que se afirmaba que cualquier señal continua con período $1/v$ podía representarse como suma de ondas sinusoidales en la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{sen}(2n\pi vt + \phi_n)$$

Para empezar nuestro estudio consideremos no una serie sino una suma finita y, por comodidad, *supondremos que el período de nuestra señal es 1*. Tenemos, pues, una suma de la forma:

$$\sum_{n=0}^N A_n \text{sen}(2n\pi t + \phi_n) \quad (3.1)$$

Es frecuente llamar a las sinusoides individuales de una suma de este tipo *armónicos*. Esta forma de una suma trigonométrica de armónicos tiene la ventaja de mostrar explícitamente la amplitud y la fase de cada uno de ellos pero es muy incómoda para los cálculos. Por ello es más frecuente escribir esta suma en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi nt) + b_n \sin(2\pi nt)) \quad (3.2)$$

la razón de escribir el término constante en la forma $a_0/2$ es para simplificar las fórmulas de los coeficientes que veremos pronto.

Se trabaja con mucha más comodidad con estas sumas si usamos la exponencial compleja. Usando las ecuaciones de Euler tenemos que:

$$\cos(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}}{2}, \quad \sin(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} - e^{-2\pi int}}{2i}$$

con ello la suma 3.2 puede ser escrita como:

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi int} \quad (3.3)$$

La relación entre estas tres formas distintas de escribir una misma suma trigonométrica viene dada por las siguientes igualdades válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (3.4)$$

$$a_n = A_n \sin \phi_n \quad b_n = A_n \cos \phi_n \quad (3.5)$$

Una suma como la que estamos considerando se llama un *polinomio trigonométrico* de orden n .

Supongamos que tenemos una señal f que podemos representar como un polinomio trigonométrico:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi int}$$

Observa que para que esto sea posible la señal f tiene que ser *muy buena* pues, por ejemplo, tiene que ser indefinidamente derivable y tener período 1. Pero ahora lo que estamos suponiendo es que la función f es conocida y que se verifica la igualdad anterior y nuestro problema es calcular los coeficientes c_n . Para ello multiplicamos dicha igualdad por $e^{-2\pi ikt}$ y obtenemos que:

$$e^{-2\pi ikt} f(t) = c_k + \sum_{n=-N, n \neq k}^N c_n e^{2\pi i(n-k)t}$$

Ahora integramos ambos lados entre 0 y 1 y tenemos en cuenta que si $q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ entonces:

$$\int_0^1 e^{2\pi iqt} dt = \frac{1}{2\pi iq} [e^{2\pi iqt}]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2\pi iq} (e^{2\pi iq} - e^0) = \frac{1}{2\pi iq} (1 - 1) = 0$$

Resulta así que:

$$c_k = \int_0^1 e^{-2\pi i k t} f(t) dt$$

Es interesante observar que, debido a que f se supone con período 1, el cálculo de la integral anterior puede hacerse en cualquier intervalo de longitud 1. En efecto, si $x \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} e^{-2\pi i k t} f(t) dt = e^{-2\pi i k (x+1)} f(x+1) - e^{-2\pi i k x} f(x) = e^{-2\pi i k x} f(x) - e^{-2\pi i k x} f(x) = 0$$

Lo que prueba que la función $\int_x^{x+1} e^{-2\pi i k t} f(t) dt$ es constante y, por tanto, igual a $\int_0^1 e^{-2\pi i k t} f(t) dt$.

Si ahora suponemos que f tiene período T podemos considerar la función $g(t) = f(t/T)$ que tiene período 1. Supuesto que

$$g(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t}$$

se deduce enseguida que:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t/T}$$

donde los coeficientes vienen dados por:

$$c_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n s} g(s) ds = [s = t/T] = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} g(t/T) dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} f(t) dt$$

Las consideraciones anteriores motivan a las siguientes definiciones.

Definición 3.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una señal de periodo T integrable en $[0, T]$. Se definen los *coeficientes de Fourier* de f por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.6)$$

El polinomio trigonométrico:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t/T} \quad (3.7)$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por 3.6, se llama *polinomio de Fourier de orden N de f* . La sucesión de los polinomios de Fourier de f se llama *serie de Fourier* de f . Cuando dicha serie converge escribimos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/T}$$

Teniendo en cuenta 3.4 se deduce que las igualdades 3.6 y 3.7 pueden escribirse de forma equivalente:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n t/T) + b_n \sen(2\pi n t/T)) \quad (3.8)$$

donde:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(e^{-2\pi i n t/T} + e^{2\pi i n t/T} \right) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi n t/T) f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{T} \int_0^T i \left(e^{-2\pi i n t/T} - e^{2\pi i n t/T} \right) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}(2\pi n t/T) f(t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Los a_n se llaman *coeficientes coseno* y los b_n *coeficientes seno* de f .

Es frecuente que $T = 2\pi$ y que se elija como intervalo de integración $[-\pi, \pi]$ con lo cual se tiene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i n t} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.11)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n t) f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n t) f(t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Observaciones

- También se utilizan las notaciones $c_n(f)$ y $\hat{f}(n)$ para representar los coeficientes de Fourier c_n de f .
- Para calcular los coeficientes de Fourier de una señal de periodo T podemos integrar en cualquier intervalo de longitud T . Suele ser frecuente, por razones de simetría, elegir el intervalo $[-T/2, T/2]$.
- Observa que nada hemos dicho aún sobre la relación entre una función f y su serie de Fourier. La pregunta ¿de qué modo la serie de Fourier de f representa a f ? no tiene una respuesta fácil porque tiene muchas respuestas. Mas adelante presentaremos algunos resultados en este sentido.
- Observa que si cambias una función en un número finito de puntos esto no afecta para nada a sus coeficientes de Fourier los cuales viene dados por medio de integrales.
- A diferencia de la serie de Taylor de una función, la cual solamente está definida si dicha función es indefinidamente derivable, la única condición para que la serie de Fourier de una función esté definida es que la función sea integrable en un intervalo. Te recuerdo que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de serie de Fourier es mucho menos restrictivo que el de serie de Taylor y esa es una de las grandes ventajas de la teoría de series de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.
- En contra de lo que pudiera parecer a primera vista, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de series de Fourier. En efecto, si

estamos interesados en representar por medio de una serie de Fourier una función f definida e integrable en un intervalo $[a, b]$ podemos *extender* dicha función a todo \mathbb{R} de manera que la extensión sea una función periódica de período $T = b - a$. Para ello basta repetir la gráfica de f en intervalos de longitud T (si $f(b) = f(a) \neq f(a)$ será preciso cambiar el valor de f en uno de los extremos del intervalo $[a, b]$).

- La consideración de funciones complejas, si bien desde un punto de vista teórico no presenta ninguna dificultad e incluso hace que la teoría sea más elegante y fácil de desarrollar, desde un punto de vista práctico no añade nada pues en las aplicaciones siempre se consideran señales reales.

3.2.1. Series de Fourier seno y coseno

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una señal de periodo T integrable en $[0, T]$ y pongamos $T/2 = L$.

- Si f es par, esto es $f(-t) = f(t)$, entonces, teniendo en cuenta que la función coseno es par y la función seno es impar, se deduce que:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\pi nt/L) f(t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- Análogamente, si f es impar, esto es $f(-t) = -f(t)$, entonces tenemos que:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi nt/T) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(2\pi nt/T) dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(\pi nt/L) f(t) dt$$

Este resultado lleva a definir las series de Fourier seno y coseno.

Sea ahora f una función definida e integrable en el intervalo $[0, L]$. Podemos *extender* f al intervalo $[-L, L]$ de dos formas distintas:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -L \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Es claro que f_1 es impar y f_2 es par y coinciden con f en $[0, L]$. La función f_1 es llamada la *extensión impar* de f y f_2 es llamada la *extensión par* de f .

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_1 se llama la *serie de Fourier seno* de f y viene dada por:

$$\sum_{n \geq 1} b_n \sin(\pi nt/L), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin(\pi nt/L) dt$$

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_2 se llama la *serie de Fourier coseno* de f y viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(\pi n t / L), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(\pi n t / L) dt$$

3.2.2. Convergencia de las series de Fourier

El siguiente resultado nos dice que en condiciones razonablemente generales la serie de Fourier de una función converge puntualmente a dicha función.

Teorema 3.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una señal periódica con período T e integrable en $[0, T]$.

1. En todo punto t donde f sea derivable por la izquierda y por la derecha se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} = f(t)$$

2. En todo intervalo $[a, b]$ donde f sea derivable con derivada acotada se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} = f(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

y además la convergencia es uniforme en $[a, b]$.

3. Si f no es continua en un punto t pero la derivada de f tiene límites por la izquierda y por la derecha en t entonces se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

donde $f(t+)$ y $f(t-)$ son, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de f en t .

3.2.3. Ejercicios

1. a) Sea $f(t) = \sin(t/3) + \sin(t/4)$. ¿Es f periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es su período?
 b) Sea $f(t) = \sin(\lambda t) + \sin(\mu t)$. Prueba que para que f sea periódica es necesario y suficiente que λ/μ sea un número racional.
 c) ¿Es periódica la función $f(t) = \sin(10t) + \sin((10 + \pi)t)$?
2. Supongamos que f es una función definida en \mathbb{R} que se anula fuera de un intervalo acotado y sea $T > 0$. Definamos

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT)$$

Observa que g es, de hecho, una suma finita.

a) Prueba que g es periódica de período T (g se llama la “periodización” de f con período T).

b) Sea

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Representa gráficamente la “periodización” de $\Gamma(t)$ para $T = 1/2, T = 3/4, T = 1, T = 2$.

3. Considera las distintas formas de escribir la serie de Fourier de una función real periódica de período 1:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t) \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} \\ & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2\pi n t + \phi_n) \end{aligned}$$

Indica con detalle cómo se pasa de una a otra, es decir, las relaciones que hay entre los distintos coeficientes.

4. Sea f una señal, c_n sus coeficientes de Fourier, a_n s y b_n sus coeficientes coseno y seno respectivamente. Justifica las siguientes afirmaciones:

$$a) \ f \text{ es real} \implies c_{-n} = \overline{c_n} \ (n \in \mathbb{N}) \iff a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N})$$

$$b) \ f \text{ es par} \implies c_{-n} = c_n \ (n \in \mathbb{N}) \iff b_n = 0 \ (n \in \mathbb{N})$$

$$c) \ f \text{ es impar} \implies c_{-n} = -c_n \ (n \in \mathbb{N}) \iff a_n = 0 \ (n \in \mathbb{N})$$

$$d) \ f \text{ real y par} \implies c_{-n} = c_n \in \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N})$$

$$e) \ f \text{ real e impar} \implies c_{-n} = -c_n \in i\mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N})$$

5. Da una demostración aceptable de la igualdad de Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

6. Calcula las series de Fourier de las extensiones periódicas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

7. Calcula la serie de Fourier coseno de la función $f(x) = x$ para $x \in [0, \pi]$.

8. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = 1$ para $x \in [0, \pi]$.

9. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, \pi]$.

10. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Si los coeficientes de Fourier de una señal f son c_n , ¿cuáles son los coeficientes de Fourier de la señal trasladada $g(t) = f(t - a)$? ¿Y los de la señal $h(t) = f(at)$?

11. Calcula las series de Fourier de las funciones $|\sin t|$ y $|\cos t|$.

Sugerencia: usa el ejercicio anterior.

12. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 1 dada por $f(t) = t$ para $0 \leq t < 1$ y $f(t + 1) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

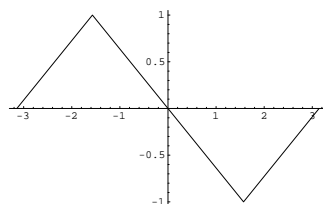
13. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2π dada por $f(t) = t^2$ para $-\pi \leq t \leq \pi$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

14. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2 dada por $f(t) = |t|$ para $-1 \leq t \leq 1$ y $f(t + 2) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

15. Calcula la serie de Fourier de la función 2π periódica que aparece en la figura.



16. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$, se define la función de período 2 $f(t) = e^{i\pi at}$ para $-1 \leq t < 1$ y $f(t) = f(t + 2)$. Calcula la serie de Fourier de f y utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

17. Prueba que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función 2π -periódica y derivable, cuya derivada f' es integrable en $[-\pi, \pi]$, se verifica que $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En otros términos: la serie de Fourier de la derivada de f se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f .

18. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periódica e integrable en $[-\pi, \pi]$ y definamos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $G(x) = F(x) - \hat{f}(0)x$, es 2π -periódica y expresa sus coeficientes de Fourier por medio de los de f .

19. Sea $f(x) = x(1-x)$, $(0 \leq x \leq 1)$ y consideremos la extensión impar de f de período 2.

a) Calcula la serie de Fourier seno de f .

b) Justifica que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{96}$.

c) Calcula la serie de Fourier coseno de $f'(x) = 1 - 2x$, $(0 \leq x \leq 1)$; y la serie de Fourier de $f''(x) = -2$.

d) deduce de lo anterior que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

3.3. Geometría de las series de Fourier

La teoría de las series de Fourier está estrechamente relacionada con los aspectos algebraicos y geométricos de los espacios euclídeos. Lo característico de la geometría euclídea es el concepto de ortogonalidad o perpendicularidad y sus consecuencias. Te recuerdo que si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ son vectores de \mathbb{R}^3 , su *producto escalar*, que notaremos por $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$, se define como:

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Se dice que \mathbf{x} e \mathbf{y} son ortogonales si $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$ y se escribe $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Te recuerdo también que la *norma euclídea* de un vector \mathbf{x} viene dada por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x} | \mathbf{x})}$$

Observa que:

$$\sum_{j=1}^3 (x_j^2 + y_j^2) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

y

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \sum_{j=1}^3 (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^3 (x_j^2 + y_j^2) + 2 \sum_{j=1}^3 x_j y_j$$

Deducimos de estas dos igualdades que:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \sum_{j=1}^3 x_j y_j = 0 \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

que no es otra cosa que el *teorema de Pitágoras*.

Observa que si $\|\mathbf{y}\| = 1$, los vectores $\mathbf{x} - (\mathbf{x} | \mathbf{y})\mathbf{y}$ e \mathbf{y} son ortogonales. Por esta razón se dice que el vector $(\mathbf{x} | \mathbf{y})\mathbf{y}$ es la *proyección ortogonal* de \mathbf{x} sobre \mathbf{y} . Una interpretación muy sugerente del producto escalar es la siguiente: *el producto escalar de dos vectores nos dice lo que cada uno de ellos conoce del otro*.

En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 las *bases ortonormales* son muy útiles porque en ellas es muy fácil representar un vector. Te recuerdo que una base de \mathbb{R}^3 , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, se llama ortonormal si $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ para $i \neq j$ y $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ donde $1 \leq i, j \leq 3$. Dado un vector \mathbf{a} , sus componentes en una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que verifican la igualdad:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 \quad (3.14)$$

Esta igualdad vectorial es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que deberemos resolver para calcular las α_i . Pero si la base \mathcal{B} es una base ortonormal entonces podemos calcular directamente las α_i pues basta para ello multiplicar escalarmente la igualdad 3.14 por \mathbf{u}_1 para obtener que:

$$(\mathbf{a} | \mathbf{u}_1) = \alpha_1 (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + \alpha_2 (\mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1) + \alpha_3 (\mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_1) = \alpha_1$$

Análogamente se obtiene que $\alpha_2 = (\mathbf{a} | \mathbf{u}_2)$ y $\alpha_3 = (\mathbf{a} | \mathbf{u}_3)$. Con ello la expresión del vector \mathbf{a} en la base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} | \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{a} | \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{a} | \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3$$

Fíjate que $(\mathbf{a} | \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$ es la proyección ortogonal de \mathbf{a} sobre \mathbf{u}_i por lo que la igualdad anterior nos dice que la expresión de un vector en una base ortonormal se obtiene sumando las proyecciones ortogonales de dicho vector sobre los vectores de la base.

Todo esto son conceptos algebraicos y geométricos. Pero en \mathbb{R}^3 también hay una estructura analítica. Recuerda que la *distancia euclídea* entre dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} viene dada por:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Pues bien, la estructura analítica a la que me refería antes es la siguiente: con la distancia euclídea \mathbb{R}^3 es un espacio métrico completo.

La generalización de lo antes dicho de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^n ya \mathbb{C}^n es inmediata. Nos proponemos generalizar todo esto a espacios de funciones y relacionarlo con las series de Fourier. En esta generalización es fácil entender los aspectos algebraicos y geométricos pero el aspecto analítico requiere el uso de la integral de Lebesgue por lo que no entraremos en él.

Lo primero que es fácil de generalizar es el concepto de ortogonalidad. Supongamos que f y g son funciones reales integrables en un intervalo $[a, b]$. Podemos considerar n puntos de dicho intervalo igualmente espaciados una distancia h y evaluar en ellos dichas funciones para obtener dos vectores (u_1, u_2, \dots, u_n) , (v_1, v_2, \dots, v_n) . La suma $h \sum_{i=1}^n u_i v_i$ es una suma de Riemann de la integral $\int_a^b f g$ y el hecho de que los vectores (u_1, u_2, \dots, u_n) , (v_1, v_2, \dots, v_n) sean ortogonales se traduce en que $\sum_{i=1}^n u_i v_i = 0$, es decir, en que dicha suma sea igual a cero. De esta forma llegamos a la siguiente definición.

Definición 3.3. Dos funciones reales f y g son ortogonales en un intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

Cuando las funciones toman valores complejos la definición anterior requiere una modificación.

Definición 3.4. Dos funciones (reales o complejas) f y g son ortogonales en un intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt = 0$$

La definición anterior nos lleva a definir un producto escalar de la forma:

$$(f | g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \quad (3.15)$$

y una norma por:

$$\|f\| = \sqrt{(f | f)} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad (3.16)$$

Aquí hay un detalle técnico y es que para que la definición 3.16 tenga sentido debe verificarse que la función $|f|^2$ sea integrable en $[a, b]$, es decir,

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$$

se dice entonces que f es una *función de cuadrado integrable* en $[a, b]$. Esta condición es *más restrictiva* que exigir que f sea integrable en $[a, b]$. Es decir, si f es de cuadrado integrable en $[a, b]$ también f es integrable en $[a, b]$ pero el recíproco no tiene por qué verificarse como puedes comprobar con $f(t) = 1/\sqrt{t}$ que es integrable en $[0, 1]$ pero $|f(t)|^2 = 1/t$ no es integrable en $[0, 1]$.

Afortunadamente esta exigencia es compatible con la definición 3.15 pues si f, g son funciones de cuadrado integrable en $[a, b]$ entonces la función producto $f\overline{g}$ es integrable en $[a, b]$.

También hay otro detalle menor y es que para conseguir que la función constante 1 tenga norma igual a 1 debemos modificar la definición 3.15. Introducimos a continuación la terminología adecuada y damos las definiciones precisas.

Definición 3.5. Representaremos por $L^2(0, T)$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que son T periódicas y de cuadrado integrable en $[0, T]$. Este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalares complejos es un espacio vectorial complejo.

Para todo par de funciones $f, g \in L^2(0, T)$ definimos su producto escalar por:

$$(f | g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\overline{g(t)} dt \quad (3.17)$$

y definimos la norma de $f \in L^2(0, T)$ por:

$$\|f\| = \sqrt{(f | f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} \quad (3.18)$$

Observaciones

- Las propiedades del producto escalar definido por la igualdad 3.17 son las usuales. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f, g, h \in L^2(0, T)$ se verifica:

1.

$$(\alpha f + \beta g | h) = \alpha(f | h) + \beta(g | h)$$

Lo que se expresa diciendo que el producto escalar es lineal en la primera variable.

2. $(f | g) = \overline{(g | f)}$

De las dos propiedades anteriores se deduce que

$$(f | \alpha g + \beta h) = \overline{\alpha}(f | g) + \overline{\beta}(f | h)$$

lo que se expresa diciendo que el producto escalar es conjugado-lineal en la segunda variable.

3. $(f | f) \geq 0$.

- La norma definida por la igualdad 3.18 tiene las propiedades usuales de las normas:

- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$.
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

- Las propiedades $(f | f) = 0 \implies f = 0$ o, lo que es igual, $\|f\| = 0 \implies f = 0$ son también ciertas pero hay que precisar lo que se entiende por $f = 0$. Desde un punto de vista práctico puedes interpretar la igualdad $f = 0$ en el sentido de que a efectos de integración la función f se comporta igual que la función nula.

- La consideración del intervalo $[0, T]$ en lo anterior es por conveniencia. Puesto que las funciones con las que trabajamos son T -periódicas podemos considerar en las definiciones anteriores cualquier intervalo de longitud T . Por razones de simetría es frecuente considerar el intervalo $[-T/2, T/2]$.

Definición 3.6. Dos funciones $f, g \in L^2(0, T)$ se llaman ortogonales si $(f | g) = 0$ en cuyo caso escribimos $f \perp g$. Un conjunto de funciones $\mathcal{B} \subset L^2(0, T)$ se dice ortogonal si para cada par de elementos distintos $f, g \in \mathcal{B}$ se tiene que $f \perp g$. Si, además para toda función $f \in \mathcal{B}$ es $\|f\| = 1$ se dice que \mathcal{B} es un conjunto ortonormal de funciones.

Es inmediato que un conjunto de funciones ortogonales es linealmente independiente.

Ejemplo 3.7. En el espacio $L^2(-\pi, \pi)$ con el producto escalar:

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \forall f, g \in L^2(-\pi, \pi)$$

un ejemplo de conjunto ortonormal de funciones especialmente importante es el formado por las exponenciales complejas:

$$\mathcal{E} = \{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Otro ejemplo de conjunto ortogonal es el formado por las funciones trigonométricas:

$$\mathcal{T} = \{1, \cos(nt), \sin(nt) : n \in \mathbb{N}\}$$

De hecho, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt &= \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt &= 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

♦

Las siguientes igualdades son de comprobación inmediata:

$$\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\operatorname{Re}(\varphi | \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(0, T) \quad (3.19)$$

Si $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ es un conjunto de n funciones ortonormales en $L^2(0, T)$ y $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ($1 \leq k \leq n$) entonces:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \quad (3.20)$$

Proposición 3.8. Supongamos que $\mathcal{B} = \{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ es un conjunto de n funciones ortonormales en $L^2(0, T)$ y sea \mathcal{M} el subespacio vectorial engendrado por \mathcal{B} . Dada una función $f \in L^2(0, T)$ la función:

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{j=1}^n (f | e_j) e_j$$

se llama la **proyección ortogonal** de f sobre \mathcal{M} y tiene las propiedades siguientes:

1. $P_{\mathcal{M}}(f) \in \mathcal{M}$.
2. $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a \mathcal{M} .
3. $\min \{\|f - g\| : g \in \mathcal{M}\} = \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|$

Demostración. La primera afirmación es evidente porque por su definición $P_{\mathcal{M}}(f)$ es combinación lineal de los vectores e_k que forman una base de \mathcal{M} .

Para probar la segunda afirmación basta observar que:

$$(f - P_{\mathcal{M}}(f) | e_k) = (f | e_k) - \sum_{j=1}^n (f | e_j) (e_j | e_k) = (f | e_k) - (f | e_k) = 0$$

lo que prueba que $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a los vectores e_k y, por tanto, también es ortogonal a cualquier combinación lineal de ellos, es decir, a cualquier vector de \mathcal{M} .

Para probar el punto 3 tenemos que para toda $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in \mathcal{M}$ se verifica:

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \|(f - P_{\mathcal{M}}(f)) + (P_{\mathcal{M}}(f) - g)\|^2 = \\ &\quad (\text{por 3.19 con } \varphi = f - P_{\mathcal{M}}(f), \psi = P_{\mathcal{M}}(f) - g) \\ &= \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}}(f) - g\|^2 + 2\operatorname{Re}(f - P_{\mathcal{M}}(f) | P_{\mathcal{M}}(f) - g) = \\ &\quad (\text{por ser } P_{\mathcal{M}}(f) - g \in \mathcal{M} \text{ se verifica que } (f - P_{\mathcal{M}}(f)) \perp (P_{\mathcal{M}}(f) - g)) \\ &= \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \left\| P_{\mathcal{M}}(f) - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\|^2 = \\ &\quad (\text{por 3.20 con } \lambda_j = (f | e_j) - \alpha_j) \\ &= \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \sum_{j=1}^n |(f | e_j) - \alpha_j|^2 \end{aligned}$$

Deducimos que para $g \in \mathcal{M}$ la cantidad $\|f - g\|$ es mínima cuando $(f | e_j) - \alpha_j = 0$, es decir, $\alpha_j = (f | e_j)$, esto es, $g = P_{\mathcal{M}}(f)$. \square

Particularicemos el resultado anterior al espacio $L^2(-\pi, \pi)$.

Proposición 3.9. Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$, y sea \mathcal{M} el espacio vectorial engendrado por las funciones $\mathcal{B} = \{e^{ikt} : -N \leq k \leq N\}$. La proyección ortogonal de f sobre \mathcal{M} es el polinomio de Fourier de f de orden N :

$$S_N(t) = P_{\mathcal{M}}(f)(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}$$

dicho polinomio es además el polinomio trigonométrico de orden N que proporciona la aproximación óptima a f en la norma de $L^2(-\pi, \pi)$:

$$\min \{ \|f - g\| : g \in \mathcal{M} \} = \|f - S_N\|$$

Demostración. Pongamos e_k para representar la función e^{ikt} . Basta observar que el conjunto de funciones $\mathcal{B} = \{e_k : -N \leq k \leq N\}$ es ortonormal en $L^2(-\pi, \pi)$ y que:

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{k=-N}^N (f | e_k) e_k = \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e_k = (\text{por 3.11}) = S_N$$

\square

Algunos resultados anteriores los hemos enunciado para $L^2(-\pi, \pi)$ pero valen igualmente para $L^2(0, T)$. Hasta aquí hemos visto los aspectos algebraicos y geométricos de los que hablamos antes. Los aspectos analíticos se recogen en el siguiente teorema.

Teorema 3.10 (de Riesz-Fisher). Para toda función $f \in L^2(0, T)$ se verifica que su serie de Fourier converge a f en la norma de $L^2(0, T)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k t / T} \right\| = 0.$$

La validez del anterior teorema depende de un hecho analítico profundo: el espacio $L^2(0, T)$ es un espacio métrico completo con la distancia dada por

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

La convergencia en la norma de $L^2(0, T)$ se llama *convergencia en media cuadrática*. Observa que dos funciones pueden estar muy próximas en media cuadrática y, sin embargo, tomar valores muy diferentes pues la media cuadrática mide un área.

Terminaremos esta sección con un resultado muy útil conocido con el nombre de “igualdad de Parseval”.

Proposición 3.11 (Igualdad de Parseval). *Para toda función $f \in L^2(0, T)$ se verifica que*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.21)$$

La igualdad de Parseval 3.21 tiene una interpretación interesante. El número $|c_n|^2$ se interpreta como la energía del armónico $c_n e^{int}$, mientras que la integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ se interpreta como la energía de la señal (en este sentido se dice que las funciones de $L^2(-\pi, \pi)$ tienen energía finita). La igualdad de Parseval expresa, pues, que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus armónicos componentes.

3.3.1. Suavidad de una señal y convergencia de su serie de Fourier

El teorema 3.2 pone de manifiesto una estrecha relación entre las propiedades locales de una función (continuidad, derivabilidad) y las propiedades globales de convergencia de su serie de Fourier. Queremos precisar un poco más esta relación. Observa que la convergencia de una serie de Fourier depende de la rapidez con la que los coeficientes c_n convergen a cero. Un primer resultado a este respecto, consecuencia directa de la igualdad de Parseval y de la condición básica necesaria para la convergencia de una serie, es el siguiente.

Proposición 3.12. *Los coeficientes de Fourier de una función de cuadrado integrable convergen a cero.*

La hipótesis de que una función sea de cuadrado integrable (tenga energía finita) es muy poco exigente, podemos intuir que si exigimos perfecciones mayores a la función obtendremos también más información sobre la forma en que los coeficientes de Fourier convergen a cero. De hecho, se verifica el siguiente resultado que puede probarse integrando por partes.

Proposición 3.13. *Sea f una función periódica y supongamos que f tiene derivadas continuas hasta el orden k . Entonces hay un número $M > 0$ tal que*

$$|c_n| \leq \frac{M}{|n|^k} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

En el caso en que $k = 1$ se verifica que la serie de los coeficientes de Fourier de f converge absolutamente, es decir, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty$.

3.3.2. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

Una señal analógica dada por medio de una función $f(t)$ se dice que está dada en el *dominio del tiempo*. Supongamos que dicha señal es T -periódica y de cuadrado integrable y que su serie de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

(igualdad que, al menos, se verifica en el sentido de la convergencia en media cuadrática). Las frecuencias de los armónicos complejos que forman esta serie son n/T . El *espectro* de f se define como el conjunto de pares $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$. El conocimiento del espectro de una señal determina a dicha señal (al menos en el sentido de la convergencia en media cuadrática). Podemos considerar una función \hat{f} definida en el conjunto de las frecuencias $\{n/T : n \in \mathbb{Z}\}$ por $\hat{f}(n/T) = c_n$. Se suele decir que dicha función representa a la señal f en el *dominio de la frecuencia*. La “gráfica” de la función $|\hat{f}|$ se llama el *espectro de amplitudes*, y la “gráfica” de la función $\arg \hat{f}$ se llama el *espectro de fases*.

Recuerda que si la serie de Fourier la escribimos en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(2\pi n t / T + \phi_n)$$

donde $A_n \geq 0$ es la amplitud del armónico n -ésimo y ϕ_n es su fase, entonces, en virtud de las igualdades 3.4 y 3.5, se verifica que $c_n = \frac{-i}{2} A_n e^{i\phi_n} = \frac{1}{2} A_n e^{i(\phi_n - \pi/2)}$; y eligiendo $\phi_n \in]-\pi/2, 3\pi/2]$ resulta que $\phi_n - \pi/2 = \text{Arg}(c_n)$, lo que justifica la terminología empleada. Ten en cuenta que para una señal real se verifica siempre que $c_n = \overline{c_{-n}}$ lo que explica el aspecto de las siguientes “gráficas”.

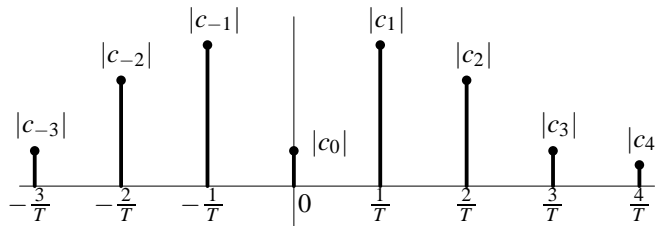


Figura 3.1: Espectro de amplitudes

El espectro de amplitudes consiste en líneas espectrales regularmente espaciadas en

las frecuencias n/T . Para $n = 1$ y $n = -1$ las líneas corresponden a la *frecuencia fundamental*. Las demás líneas son llamadas *armónicos* de la señal.

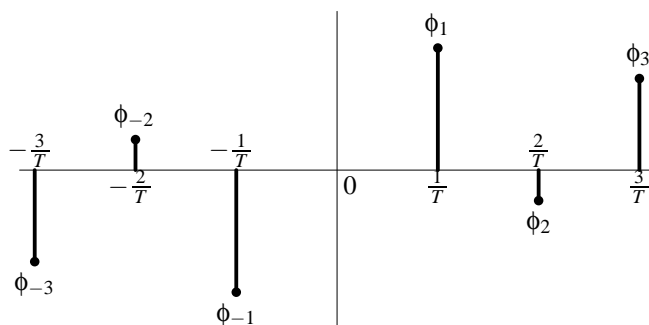


Figura 3.2: Espectro de fases

Lo interesante de estas representaciones es que para manipular una señal analógica es más fácil hacerlo en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, si la señal es un sonido las frecuencias bajas corresponden a los tonos graves y las altas a los agudos, mientras que las amplitudes representan la intensidad del sonido del armónico correspondiente.

3.3.3. Ejercicios

- Usando las propiedades algebraicas del producto escalar en $L^2(0, T)$, prueba las siguientes igualdades:

$$a) \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f | g)$$

$$b) \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

$$c) \|f - ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2 \operatorname{Im}(f | g)$$

$$d) 4(f | g) = (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) + i(\|f + ig\|^2 - \|f - ig\|^2)$$

- Comprueba que el conjunto formado por las funciones trigonométricas:

$$\{1, \cos(2\pi nt/T), \sin(2\pi nt/T) : n \in \mathbb{N}\}$$

es ortogonal en $L^2(0, T)$.

3.4. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta

Actualmente la mayor parte de las señales están digitalizadas. Para fijar ideas, consideremos una señal de sonido. Las variaciones en la presión del aire que constituyen un sonido hacen vibrar la membrana de un micrófono que las transforma en una señal eléctrica cuyo voltaje oscila continuamente y es convertido en una serie de números por un digitalizador. Un digitalizador es algo así como un voltímetro que hace miles de medidas por segundo. Cada medida da lugar a un número que se almacena digitalmente (en

formato de 8 bits o 16 bits dependiendo de la perfección con que se quiera reproducir el sonido). Este número se llama una muestra y al proceso de convertir un sonido en una serie de números se le llama muestreo.

La tarjeta de sonido de tu ordenador tiene un digitalizador. Si conectas un micrófono a tu ordenador y grabas tu voz, el archivo que resulta contiene una serie de muestras que permiten reproducir lo que has grabado.

Lo anterior quiere decir que usualmente lo que conocemos de una señal es una muestra, esto es, una señal podemos verla como un vector cuyas componentes son valores de la señal en determinados instantes. Si el tamaño de la muestra es N , este vector está en el espacio vectorial N -dimensional \mathbb{C}^N . En términos muy generales puede afirmarse que el análisis de esta señal consiste en representarla en diferentes bases de \mathbb{C}^N . Estas bases se eligen de forma que la correspondiente representación pueda ser fácilmente interpretada y proporcione información útil sobre la señal. Un ejemplo de esto es la Transformada de Fourier Discreta que vamos a ver a continuación.

Supongamos que conocemos N muestras de una señal periódica f de período T las cuales se han tomado en instantes t_k igualmente espaciados a lo largo de un período, es decir, $t_k = kT/N$, donde $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Conocemos, pues, los N números¹:

$$f(kT/N) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

y sabemos que f tiene período T . Usando esta información *queremos calcular una buena aproximación de los coeficientes de Fourier de f .*

Como tenemos N datos parece lógico calcular N coeficientes c_n . Sabemos que bajo hipótesis muy generales se verifica que $\lim\{c_n\} = 0$, esto es, la sucesión de los coeficientes de Fourier converge a cero. Por ello los coeficientes más significativos vienen al principio. Teniendo esto en cuenta, vamos a tratar de calcular los coeficientes c_n para $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ (o un intervalo centrado si N es impar). Este cálculo podemos hacerlo de dos formas.

Calculando de forma aproximada el valor de la integral

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt$$

Para ello podemos proceder como sigue:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{T} \int_{kT/N}^{(k+1)T/N} f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(kT/N) e^{-2i\pi nk/N}$$

lo que nos lleva a tomar como una aproximación de los coeficientes c_n los números

$$c'_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \quad \text{donde } \omega = e^{2i\pi/N}, \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (3.22)$$

¹Es usual en este contexto trabajar con índices que empiezan en 0. La gran mayoría de los textos lo hacen así. Esto tiene el pequeño inconveniente de que un vector de datos no tiene una posición 0 lo que, como veremos en las prácticas que haremos sobre este tema con *Mathematica*, obliga a hacer pequeños ajustes en los algoritmos de cálculo.

Otra forma de proceder es calcular coeficientes \hat{c}_n por la condición de que el polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{c}_n e^{2i\pi nt/T}$$

interpole a f en los puntos t_k , es decir, verifique que $P(kT/N) = y_k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Debemos resolver para ello el siguiente sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas (los \hat{c}_n):

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{c}_n \omega^{nk} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{n=-N/2}^{-1} \hat{c}_n \omega^{nk} = \sum_{p=N/2}^{N-1} \hat{c}_{p-N} \omega^{(p-N)k} = \sum_{n=N/2}^{N-1} \hat{c}_{n-N} \omega^{nk}$$

y definiendo:

$$Y_n = \begin{cases} \hat{c}_n & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \hat{c}_{n-N} & \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

el sistema 3.23 puede escribirse en la forma:

$$\sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega^{nk} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

Este sistema puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Pongamos $\Omega_N = (\omega^{nk})_{\substack{0 \leq k \leq N-1 \\ 0 \leq n \leq N-1}}$. Es evidente que Ω_N es una matriz simétrica. Definamos los vectores columna de esta matriz:

$$\omega_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \omega = e^{2i\pi/N}$$

Observa que, de forma natural, estamos ya trabajando en \mathbb{C}^N . Recuerda que en \mathbb{C}^N el producto escalar euclídeo está dado por:

$$(\mathbf{z} | \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \overline{w_j} \quad \mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}), \mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})$$

Teniendo en cuenta que $\omega^N = 1$, es fácil comprobar que los vectores ω_k ($0 \leq k \leq N-1$) son ortogonales y tienen norma igual a \sqrt{N} . Dichos vectores son, por tanto, linealmente independientes y forman una base ortogonal de \mathbb{C}^N . La igualdad 3.25 nos dice que

$(Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$ son las coordenadas del vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ en dicha base o, lo que es igual, notando \mathbf{e}_k el vector k -ésimo de la base canónica de \mathbb{C}^N :

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_k$$

Multiplicando escalarmente esta igualdad por ω_n obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k (\mathbf{e}_k | \omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k (\omega_k | \omega_n) = Y_n (\omega_n | \omega_n) = NY_n$$

esto es:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad \omega = e^{2i\pi/N} \quad (3.26)$$

Pero estas son exactamente las mismas igualdades 3.22. Observa que pueden escribirse en forma fácil de recordar:

$$Y_n = \frac{1}{N} (\mathbf{y} | \omega_n), \quad \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}), \quad \omega_n = (1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(N-1)n}), \quad \omega = e^{2i\pi/N} \quad (3.27)$$

Hemos probado así que:

$$c'_n = \hat{c}_n = Y_n \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (3.28)$$

$$c'_{n-N} = \hat{c}_{n-N} = Y_n \quad \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \quad (3.29)$$

Definición 3.14. La transformación $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ que a un vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ hace corresponder el vector $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ dado por las igualdades 3.26 o 3.27 se llama la Transformada de Fourier Discreta (DFT) en \mathbb{C}^N .

Observa que la DFT es una biyección lineal de \mathbb{C}^N en \mathbb{C}^N cuya inversa viene dada por 3.25. Teniendo en cuenta que Ω_N es una matriz ortogonal simétrica cuya inversa viene dada por $\Omega_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\Omega_N}$, podemos escribir:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \overline{\Omega_N} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Y}) = \Omega_N \mathbf{Y}$$

equivalentemente

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi nk/N}, \quad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2i\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Observaciones

- La definición que hemos dado de la DFT es la más usual aunque adolece de cierta falta de simetría debido al factor de escala $1/N$ que figura en la transformada directa pero no en su inversa. De hecho, la definición de la DFT puede variar de unos textos a otros. Es frecuente ortonormalizar la base formada por los vectores ω_k , esto es, considerar la base ortonormal formada por los vectores $\frac{1}{\sqrt{N}} \omega_k$. Con ello se consigue que en las fórmulas anteriores figure como factor de escala en ambas $1/\sqrt{N}$.

- No hay que olvidar la relación entre los Y_n y los coeficientes aproximados de Fourier \hat{c}_n que viene dada por las igualdades 3.28 y 3.29.
- Aunque hemos supuesto al principio que el vector \mathbf{y} se obtenía tomando N valores igualmente espaciados de una función periódica a lo largo de un período, es claro que se trataba nada más que de una motivación inicial. La TFD (transformada de Fourier discreta) no tiene ninguna limitación: el vector \mathbf{y} puede ser cualquier elemento de \mathbb{C}^N . De hecho, la TFD se utiliza para intentar averiguar las frecuencias presentes en series de datos de cualquier naturaleza. Pero hay un convenio que se sigue siempre cuando se trabaja con la TFD y que consiste en considerar que el vector $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}\}$ es una muestra de una sucesión infinita periódica de período N . Es decir, dado un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leq q \leq N-1$ es el resto de la división de k por N . Con este convenio es inmediato comprobar que el vector $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$ verifica que $Y_{k+N} = Y_k$, es decir, es periódico con período N . Esta propiedad se expresa diciendo que la TFD transforma señales periódicas discretas en el dominio del tiempo en señales periódicas discretas en el dominio de la frecuencia.
- El espectro de la señal \mathbf{y} es el conjunto $\{(n/N, Y_n) : n \in \mathbb{Z}\}$. El espectro de amplitudes es el conjunto $\{(n/N, |Y_n|) : n \in \mathbb{Z}\}$ y el espectro de fases $\{(n/N, \text{Arg}(Y_n)) : n \in \mathbb{Z}\}$ dichos conjuntos suelen representarse por segmentos de línea que unen los puntos $(n/N, 0)$ con los puntos del espectro correspondiente. Debido a la periodicidad de los Y_n es suficiente representar dichos espectros para N valores consecutivos de n .
- Para señales \mathbf{y} reales se verifica que $Y_{-n} = \bar{Y}_n$ donde la barra indica complejo conjugado. Como $Y_{-n} = Y_{N-n}$ haciendo $n = N/2 - k$ obtenemos que $Y_{N/2+k} = \bar{Y}_{N/2-k}$ de donde se deduce que

$$|Y_{N/2+k}| = |Y_{N/2-k}| \quad \text{y} \quad \text{Arg}(Y_{N/2+k}) = \text{Arg}(\bar{Y}_{N/2-k}) = -\text{Arg}(Y_{N/2-k})$$

esto es el espectro de amplitudes es simétrico respecto a $N/2$ y el espectro de fases es antisimétrico respecto a $N/2$. Por esta razón, como en la práctica siempre se trabaja con señales reales, es costumbre representar solamente la mitad más uno de los puntos de dichos espectros correspondientes a los valores $0, 1, 2, \dots, N/2$. Los cuales son suficientes para recuperar la señal original combinándolos con sus conjugados que representan frecuencias negativas.

- Hay una estrecha analogía entre la DFT y las series de Fourier.
 - Series de Fourier.
 - Se considera una señal *continua* en el dominio del tiempo, f , con período T y, por tanto, con frecuencia $1/T$ expresada en Hercios (ciclos por segundo).
 - Se trata de descomponer dicha señal como una serie de señales con frecuencias n/T (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental). La señal modelo con frecuencia n/T (ciclos por segundo) es $\sin(2\pi nt/T)$. La forma compleja de dicha señal es la función $\mathbf{e}_n(t) = e^{2\pi i n t/T}$.

- El *peso* que la componente de frecuencia n/T tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(f | \mathbf{e}_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt$$

- La serie que representa a la señal f es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f | \mathbf{e}_n) e^{2\pi i n t / T}$. Dicha serie proporciona el espectro de la señal y constituye la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.
- En el contexto de las series de Fourier las igualdades:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt \quad (3.30)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t / T} \quad (3.31)$$

se llaman, respectivamente, las ecuaciones de análisis y de síntesis.

• Transformada de Fourier Discreta.

- Se considera una señal discreta $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ formada por N valores que se interpretan como un período de una señal discreta periódica de período N .
- Se trata de descomponer dicha señal como una suma de señales con frecuencias n/N (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $1/N$). La señal *continua* modelo con frecuencia n/N (ciclos por segundo) es $\sin(2\pi n t / N)$. La forma compleja de dicha señal es $e^{2\pi i n t / N}$. Puesto que de la señal original solamente conocemos sus valores para $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, lo que hacemos es evaluar en dichos puntos la señal $e^{2\pi i n t / N}$ y obtenemos así el vector

$$\omega_{\mathbf{n}} = (1, e^{2\pi i n 2/N}, e^{2\pi i n 3/N}, \dots, e^{2\pi i n (N-1)/N})$$

- El *peso* que la componente de frecuencia n/N tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i n k / N}$$

- La suma que representa a la señal discreta \mathbf{y} es $\sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}) \omega_{\mathbf{n}}$. Dicha suma se interpreta como la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.
- Los coeficientes Y_n se llaman *coeficientes espectrales* de la señal \mathbf{y} . Las igualdades:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i n k / N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.32)$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2\pi i n k / N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.33)$$

se llaman, respectivamente, la *ecuación de análisis* y la *ecuación de síntesis*. La frecuencia fundamental en 3.33 es $\omega = 1/N$.

Convolución y DFT

Como acabamos de explicar, interpretamos los elementos de \mathbb{C}^N como sucesiones periódicas con período N (observa que esto se corresponde con la situación inicialmente considerada $y_k = f(kT/N)$ para $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ donde f era una señal con período T , lo que implica que $y_{k+N} = y_k$). Esto justifica la siguiente definición.

Dado $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leq q \leq N-1$ es el resto de la división de k por N .

Se define la convolución² (llamada a veces convolución circular o periódica o cíclica) de dos elementos de \mathbb{C}^N , $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ e $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ como el elemento $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ de \mathbb{C}^N definido por:

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es inmediato que z_k es una sucesión periódica con período N . Escribiremos simbólicamente $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$.

Fijado un vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$, la aplicación que a un vector $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ hace corresponder el producto de convolución $\mathbf{z} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$ es una aplicación lineal de \mathbb{C}^N en \mathbb{C}^N que podemos escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_{N-1} & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Las propiedades del producto de convolución se deducen fácilmente de la siguiente importante propiedad.

Dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ y $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ en \mathbb{C}^N notaremos por $\mathbf{ab} \in \mathbb{C}^N$ su **producto puntual**:

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0, a_1 b_1, \dots, a_{N-1} b_{N-1})$$

Proposición 3.15. Sean $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ vectores en \mathbb{C}^N . Entonces se verifica que:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = N \mathcal{F}(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{y}), \quad \mathcal{F}(\mathbf{xy}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \odot \mathcal{F}(\mathbf{y}) \quad (3.35)$$

Demostración. Pongamos $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$, $\mathbf{X} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$ y $\mathbf{Z} = \mathcal{F}(\mathbf{z})$. Por definición:

$$Z_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \omega^{-nk}$$

²Este es uno de los distintos tipos de convolución más frecuentes. Las operaciones de convolución son muy usadas en el procesamiento de señales digitales. Los tipos de filtros más frecuentes actúan sobre la señal de entrada “input” haciendo una convolución con la “función respuesta-impulso del filtro”.

permutando el orden en las sumas obtenemos que:

$$Z_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} x_q \omega^{-nq} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k-q} \omega^{-n(k-q)} = N X_n Y_n$$

lo que prueba la primera igualdad en 3.35. La otra igualdad se comprueba de forma análoga. \square

¿Qué podemos hacer con la Transformada de Fourier Discreta?

La DFT permite representar una muestra en el dominio de la frecuencia. Para ello representamos segmentos que unen los puntos $(n/T, 0)$ y $(n/T, |Y_n|)$. En el dominio de la frecuencia la señal queda claramente descompuesta en sus componentes sinusoidales: cada segmento representa la componente sinusoidal de la frecuencia n/T y amplitud $|Y_n|$. Es muy fácil manipular esta representación para suprimir, por ejemplo, pequeñas distorsiones. En la señal original (en el dominio del tiempo) estas pequeñas distorsiones pueden quedar ocultas pero eso no ocurre en el dominio de la frecuencia pues en él podemos ver las distintas frecuencias que acompañan a la principal y podemos eliminar las frecuencias más altas que suelen corresponder a las distorsiones. Posteriormente recuperamos la señal modificada vía la DFT inversa. Esto es lo que se conoce como “filtrado de la señal” y eso es lo que hacen los convertidores digitales-analógicos.

El dominio de la frecuencia forma parte de nuestra vida diaria. La combinación cerebro-oído es un excelente analizador de frecuencias, capaz de distinguir en un sonido complejo frecuencias muy próximas. Un médico que ausculta un paciente está tratando de oír frecuencias que le digan que algo no va bien. Lo mismo hace un mecánico que escucha el sonido de un motor.

Noticia sobre un famoso algoritmo: la Transformada Rápida de Fourier

Para calcular la DFT usando las fórmulas 3.26 son necesarias

$$\begin{aligned} (N-1)^2 & \text{ multiplicaciones complejas} \\ N(N-1) & \text{ adiciones complejas} \end{aligned}$$

Y no hay que olvidar que una multiplicación compleja son 4 operaciones reales. Por ello el coste de cálculo de una DFT de N puntos es del orden de $4N^2$ operaciones reales de punto flotante. Para hacernos una idea de lo que esto supone, recordemos que en los años 50 un ordenador podía realizar del orden de 10^3 operaciones por segundo y para calcular una DFT de 100 puntos necesitaría un tiempo de:

$$4 \times 100^2 \text{ operaciones} \times \frac{1 \text{ s}}{10^3 \text{ operaciones}} = 40 \text{ s}$$

y una DFT de 1000 puntos necesitaría un tiempo de cálculo de 4000 s = 1.1h. Actualmente un PC es capaz de realizar 10^7 operaciones por segundo y el tiempo de cálculo de una DFT

de 1000 puntos es 0.4 segundos. Esto parece rápido pero en la práctica está muy lejos de ser suficientemente rápido. Considera que es una técnica muy frecuente hacer una DFT de 1000 puntos para generar cada imagen de una animación. Si la animación consta de 10000 imágenes (por tanto es de muy corta duración) el tiempo total de cálculo sería de 4000 segundos, unos 67 minutos. Demasiado.

Puesto que la DFT se ha convertido en la herramienta básica para el tratamiento de señales, no es de extrañar que haya quien afirme que el mundo moderno empezó en 1965 cuando J. Cooley and J. Tukey publicaron su eficaz método para calcular la DFT. Dicho método de cálculo se conoce con el nombre de *Transformada Rápida de Fourier* (FFT=Fast Fourier Transform). Este algoritmo, que marcó una importante etapa en el desarrollo de lo que se conoce como la teoría de *complejidad de algoritmos*, reduce el coste de cálculo de la DFT (suponiendo que N es de la forma 2^p) del orden de N^2 al orden de $N \log_2(N)$. Para $N = 1024 = 2^{10}$ esto supone unas 10.240 operaciones de punto flotante, esto es, reducimos en 1/100 el tiempo de cálculo. Esta enorme reducción del coste computacional es lo que en la práctica hizo posible realizar análisis de Fourier en ordenadores, lo que explica que el trabajo

J.W. Cooley and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine computation of complex Fourier series*, Math. Comp. **19**(1965), 297-301

sea el trabajo de matemáticas más frecuentemente citado de todos los tiempos.³

Un uso frecuente de la FFT es para calcular convoluciones. Observa que la igualdad 3.34 implica que para calcular el producto de convolución $\mathbf{y} \odot \mathbf{x}$ se necesitan:

N^2 multiplicaciones complejas

$N(N-1)$ adiciones complejas

La igualdad $\mathcal{F}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = N \mathcal{F}(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{y})$ implica que:

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = N \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{y}))$$

lo que permite usar el algoritmo de la FFT para calcular convoluciones ahorrando tiempo de cálculo.

3.4.1. Ejercicios

1. Comprueba que los vectores

$$\omega_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \omega = e^{2i\pi/N}$$

forman una base ortogonal de \mathbb{C}^N .

2. Recuerda que consideramos los elementos de \mathbb{C}^N como sucesiones periódicas con período N . Explícitamente: dado $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$,

³Tukey fue también el inventor del término “bit” como una abreviatura de “binary digit”. ¿No sería esto motivo suficiente para pasar a la Historia?

definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leq q \leq N-1$ es el resto de la división de k por N . Por ejemplo, $y_{-1} = y_{N-1}$, $y_{-2} = y_{N-2}$, $y_N = y_0$, $y_{N+1} = y_1$.

Se dice que la sucesión (y_n) es par si $y_{-n} = y_n$ y se dice que es impar si $y_{-n} = -y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que $(y_n) \xrightarrow{\mathcal{F}} (Y_n)$. Prueba que:

a) $(y_{-n}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (Y_{-n})$

b) $(\overline{y}_n) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\overline{Y}_{-n})$

c) $(\overline{y}_{-n}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\overline{Y}_n)$

d) (y_n) es par (impar) $\iff (Y_n)$ es par (impar).

e) (y_n) es real $\iff Y_{-n} = \overline{Y}_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

f) (y_n) es real y par $\iff (Y_n)$ es real y par.

g) (y_n) es real e impar $\iff (Y_n)$ es imaginario puro e impar.

3. Calcula la transformada de Fourier discreta de las siguientes sucesiones:

a) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

b) $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$

c) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$

d) $(1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$

e) $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

4. Justifica que $\sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2$.

5. Sea $\mathbf{Z} = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbf{y}))$. Calcula las componentes Z_k de \mathbf{Z} en función de las componentes y_n de \mathbf{y} .